ÜBERBLICK MATHEMATIK – „GUT ZU WISSEN“

LINEARE ALGEBRA – VEKTOREN & MATRIZEN (AFFINE ABBILDUNGEN)

1. Geradentreue

Abbildung $\vec{x} \xrightarrow{\mathrm{A}} \vec{x}' = A \circ \vec{x} + \vec{c}$ wobei A die zu A gehörende Abbildungsmatrix ist

Gerade: $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

$$\vec{x}' = \mathrm{A}(g)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(g) &= A \circ \vec{x} + \vec{c} \\
&= A \circ \left(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}\right) + \vec{c} = A \circ \vec{a} + \lambda \cdot \left(A \circ \vec{u}\right) + \vec{c} \\
&= \underbrace{A \circ \vec{a} + \vec{c}}_{\vec{a}'} + \lambda \cdot \underbrace{\left(A \circ \vec{u}\right)}_{\vec{u}'}
\end{aligned}$$

2. Kreuzprodukt in Verbindung mit Flächen

Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Beachte: Das Kreuzprodukt ist nur für 3-dimensionale Vektoren definiert!

In der Ebene sehe das folgendermaßen aus:

$|\left|\vec{a}, \vec{b}\right| |=| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} | = \left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|$ ($\vec{a}$ sowie $\vec{b}$ stellen 2-dimensionale Vektoren da)

Ein Dreieck PQR, das zwischen $\vec{q}$ sowie $\vec{r}$ aufgespannt ist lässt sich wie folgt berechnen:

$$F_{PQR} = \tfrac{1}{2} \cdot |\left|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right| | = \tfrac{1}{2} \cdot | \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} | = \tfrac{1}{2} \cdot \left|q_1 r_2 - q_2 r_1\right|$$

3. Matrizen

Scherung um α an der x-Achse	Streckung um Faktor k	pos. Drehung am Ursprung	Spiegelung an $y = m \cdot x$
$\begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right) \end{pmatrix}$

4. Außerdem definiert

Norm (Länge 2-dimensionaler Vektoren) $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

Skalarprodukt: $\vec{u} \circ \vec{v} = v_1 u_1 + v_2 u_2$ wenn $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Zusammenhang: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} c - a \\ d - b \end{pmatrix}$

Winkel zwischen 2 Vektoren: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$

© 2007 www.peter-s-home.de/downloads

Autor: Peter S. Drössler