ÜBERBLICK MATHEMATIK

LINEARE ALGEBRA II

1. Inverse Matrizen

Die Gleichung $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}}$ (wobei u_1&u_2 unbekannt) wird mithilfe der

Inversen Matrix $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gelöst: $I \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ (I = Einheitsmatrix/Identität)

2. Eigenwerte & Eigenvektoren

Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und gesucht seien deren Eigenwerte und Eigenvektoren (=Fixrichtungen). Man betrachtet die Gleichung $A \circ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$, wobei λ die Eigenwerte darstellen.

Lösungsweg:

a) Die Gleichung $(A - \lambda \cdot I) \circ \vec{u} = \vec{0}$ besitzt genau dann eine Lösung $\vec{u} \neq 0$ wenn gilt $\det(A - \lambda \cdot I) \overset{!}{=} 0$. Zu lösen ist also die Gleichung $\det(A - \lambda \cdot I) \overset{!}{=} 0$.
Beachte: Es kann bei 2x2-Matrizen maximal 2 Eigenwerte geben (p-q-Formel)

b) Aus a) erhält man die Eigenwerte der Matrix, die man dann in die Ursprungsgleichung $A \circ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ einsetzen kann. Man erhält wiederum zwei Gleichungen
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} au_1 + bu_2 = \lambda u_1 \\ cu_1 + du_2 = \lambda u_1 \end{matrix}$
Beachte: Am Ende muss eine der Variablen u frei wählbar sein.

c) Es lassen sich somit die Fixrichtungen der Matrix A angeben: $\vec{u} = k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

3. Isometrie & Winkeltreue

Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die winkeltreu sind, zeigen folgende wichtige Eigenschaften:

$ab = -cd$ und $a^2 + c^2 = k^2$ sowie $b^2 + d^2 = k^2$

Gilt k=1, sind diese Matrizen noch zusätzlich isometrisch (=längentreu).

ANHANG „GUT ZU WISSEN“

ABBILDUNGEN $P \xrightarrow{A} P'$

Streckung	$\vec{x}' = (k \cdot \mathrm{I}) \circ \vec{x}$	$k = \mathit{Streckfaktor}$
Verschiebung:	$\vec{x}' = \mathrm{I} \circ \vec{x} + \vec{b}$	$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *Verschiebungsfaktor*
Drehung (um α):	$\vec{x}' = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Spiegelung:	$\vec{x}' = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right) \end{pmatrix}$ bzw. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \pm\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \mp\cos 2\alpha \end{pmatrix}$
Scherung:	$\vec{x}' = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bei Verkettungen von Drehungen oder Spiegelungen werden **Additionstheoreme** benötigt:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

AUßERDEM DEFINIERT:

Norm (Länge 2-dimensionaler Vektoren)		$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$	
Skalarprodukt:	$\vec{u} \circ \vec{v} = v_1 u_1 + v_2 u_2$	wenn $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$	
Zusammenhang:	$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$
Winkel zwischen 2 Vektoren:		$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$	

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

im 2-dimensionalen Raum gilt: $\left| \left| \vec{a}, \vec{b} \right| \right| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ ($\vec{a}$ sowie $\vec{b}$ sind 2-dimensionale Vektoren)

Ein Dreieck PQR, das zwischen $\vec{q}$ sowie $\vec{r}$ aufgespannt ist lässt sich wie folgt berechnen:

$$F_{PQR} = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \left| \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \right| \right| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \cdot |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$