ÜBERBLICK MATHEMATIK

ALLGEMEIN: VEKTOREN- & MATRIZENRECHNUNG

Definition Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, in der Addition und eine S-Multiplikation erklärt sind.

Nachweis für lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

1. $\mathrm{A} \circ \left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = \mathrm{A} \circ \overrightarrow{x_1} + \mathrm{A} \circ \overrightarrow{x_2}$
2. $\mathrm{A} \circ \left(\lambda \cdot \vec{x}\right) = \lambda \cdot \left(\mathrm{A} \circ \vec{x}\right)$

mit $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Beweis 1:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \circ \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot (a_1 + b_1) + a_{12} \cdot (a_2 + b_2) \\ a_{21} \cdot (a_1 + b_1) + a_{22} \cdot (a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2 \\ a_{21} \cdot a_1 + a_{22} \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{A} \circ \overrightarrow{x_1} + \mathrm{A} \circ \overrightarrow{x_2} \end{aligned}$$

Beweis 2:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \circ \left(\lambda \cdot \vec{x}\right) = \mathrm{A} \circ \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot \lambda \cdot a_1 + a_{12} \cdot \lambda \cdot a_2 \\ a_{21} \cdot \lambda \cdot a_1 + a_{22} \cdot \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2) \\ \lambda \cdot (a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \left(\mathrm{A} \circ \vec{x}\right) \end{aligned}$$

Darstellung von Geraden durch Orts- & Richtungsvektoren

Allgemein:

$$g : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{Aufpunkt} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{Richtungsvektor}$$

Mögliche Aufgaben (gegeben: x, y, u_1, u_2)

1. Prüfe nach, welche Punkte auf der Geraden liegen!
   Lösung: Punkte einsetzen für den Vektor und λ entspreche
2. Gib vier weitere Punkte an!
   Lösung: Verschiedene Werte für λ wählen
3. Wie liegt eine weitere Gerade (angegeben) zu g?
   Parallelität? λ suchen, sodass sich hinten gleiche Steigungen ergeben.
   Gleichheit: Liegt der Aufpunkt von g auf h und die beiden sind parallel, so sind die Geraden identisch

Umschreiben von Geradengleichungen

$$f(x) = m \cdot x + c = \tfrac{m_1}{m_2} \cdot x + c$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{b_2}{b_1} \cdot x + \underbrace{\left(a_2 - \tfrac{b_2}{b_1} \cdot a_1\right)}_{c}$$

$$ax + by = c \quad \eta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Autor: Peter S. Drössler

ÜBERBLICK MATHEMATIK

ALLGEMEIN: VEKTOREN- & MATRIZENRECHNUNG

Wichtige mathematische Sätze

Injektivität:
Besitzt eine Matrix A die Eigenschaft $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, dann werden 2 verschiedene Punkte wiederum auf zwei verschiedene Punkteabgebildet.

Eine Matrix-Vektorgleichung der Form $\mathrm{B} \circ \vec{u} = \vec{0}$ besitzt genau dann eine Lösung $\vec{u} \neq 0$, wenn $\det(\mathrm{B}) = 0$ – Wenn $\det(\mathrm{A} - c \cdot \mathrm{I}) = 0$ dann sind **Fixrichtungen** vorhanden.

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Suchen von Fixgeraden

Aufgabenstellung: Eine beliebige Matrix $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei gegeben. Gibt es Geraden der Form $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u}$ die durch diese durch A auf sich selbst abgebildet werden?

Lösung:
Zunächst wird die Gerade, die entstehen soll, allgemein formuliert: $g' : \vec{x'} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{v}$.

1. **Überlegung:** Es sind Fixrichtungen vorhanden, wenn gilt: $\vec{v} = c \cdot \vec{u} = \mathrm{A} \cdot \vec{u}$
2. **Überlegung:** Der Aufpunkt der neuen Geraden muss auf der alten Geraden liegen: $\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u}$

Anschließend müssen zwei Beweise geführt werden, die aufeinander aufbauen:

Beweis I: **Fixrichtungen:** Mit den Lösungen für c aus der Gleichung $\det(\mathrm{A} - c \cdot \mathrm{I}) = 0$, kann man das Problem $c \cdot \vec{u} = \mathrm{A} \cdot \vec{u}$ lösen (Bei zwei Lösungen müssen zwei Gleichungen $c \cdot \vec{u} = \mathrm{A} \cdot \vec{u}$ gelöst werden). Es existiert immer dann eine Lösung $u \neq 0$, wenn Lösungen für c existieren

Beweis II: **Gleichheit $g \equiv g'$:** Über den Zusammenhang $\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cdot \vec{p} - \mathrm{I} \cdot \vec{p} = \lambda \cdot \vec{u}$ erhält man einen Zusammenhang für p_1 und p_2 und damit den Zusammenhang für den Aufpunkt der neuen Geraden g' (*funktioniert nur bei Ursprungsgeraden?)*

Abbildungen $P \xrightarrow{\mathrm{A}} P'$ *(by Manuel T. Klein)*

Streckung	$\vec{x'} = (k \cdot \mathrm{I}) \circ \vec{x}$	$k = \textit{Streckfaktor (errechenbar über S.d.P.)}$
Verschiebung:	$\vec{x'} = \mathrm{I} \circ \vec{x} + \vec{b}$	$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *Verschiebungsfaktor*
Drehung (90°):	$\vec{x'} = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *bzw.* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Punktspiegelung	$\vec{x'} = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Spiegelung an 2. WH:	$\vec{x'} = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *an 1. WH ohne Minus*
Scherung:	$\vec{x'} = \mathrm{A} \circ \vec{x}$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autor: Peter S. Drössler